TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN

I-Phương trình sai phân bậc nhất:

✪**Dạng 1**: Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = const \\ ax_{n+1} + bx_n = 0 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số?

Từ công thức truy hồi ta có : $x_n = \left(-\frac{b}{a}\right).x_{n-1} = \left(-\frac{b}{a}\right)^2.x_{n-2} = ... = \left(-\frac{b}{a}\right)^n.x_0$

Khi đó công thức tổng quát (CTTQ) của dãy số được xác định bởi : $x_n = x_0.\left(-\frac{b}{a}\right)^n$.

☆**Thí dụ** : Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi : $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} - 3x_n = 0 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Giải: Từ công thức truy hồi ta có : $x_n = 3x_{n-1} = 3^2 x_{n-2} = ... = 3^n x_0$ *hay* $x_n = 5.3^n$.

✪**Dạng 2:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 \\ ax_{n+1} + bx_n = P_k(n) \end{cases}$, với $P_k(n)$ là đa thức bậc k của n.

Tìm số hạng tổng quát của dãy số ?

Giải: Xét phương trình đặc trưng : $a\lambda + b = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{b}{a}$.

Đối với dạng này ta xét thêm một giá trị x_n^* gọi là nghiệm riêng của phương trình sai phân. Khi đó số hạng tổng quát của dãy được xác định bởi : $x_n = c.\lambda^n + x_n^*$. Trong đó nghiệm riêng x_n^* được xác định như sau :

- ❖ Nếu a + b ≠ 0 thì nghiệm riêng $x_n^* = Q_k(n)$ thay vào phương trình ta được: $a.Q_k(n+1) + b.Q_k(n) = P_k(n)$. Đồng nhất hệ số ta tìm được $Q_k(n)$.
- ❖ Nếu a + b = 0 thì nghiệm riêng $x_n^* = n.Q_k(n)$ thay vào phương trình ta được: $a(n+1).Q_k(n+1) + bn.Q_k(n) = P_k(n)$. Đồng nhất hệ số ta tìm được $n.Q_k(n)$.

☆**Thí dụ 1:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} - 2x_n = 3n^2 + 4n + 5 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát x_n .

Giải: Xét phương tình đặc trưng $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Ta có : a + b = 1 – 2 = -1 ≠ 0 nên nghiệm riêng pt có dạng : $x_n^* = an^2 + bn + c$. Thay x_n^* vào pt, ta được : $a(n+1)^2 + b(n+1) + c - 2an^2 - 2bn - 2c = 3n^2 + 4n + 5$

$\Leftrightarrow -an^2 + (2a-b)n + a + b - c = 3n^2 + 4n + 5$.

Đồng nhất hệ số hai vế ta được :

$$\begin{cases} -a = 3 \\ 2a - b = 4 \\ a + b - c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -10 \\ c = -18 \end{cases} \Rightarrow x_n^* = -3n^2 - 10n - 18 .$$

CTTQ của số hạng trong dãy : $x_n = c.2^n - 3n^2 - 10n - 18$.

Từ $x_0 = 7 \Rightarrow c - 18 = 7 \Rightarrow c = 25.$ *Suy ra* $x_n = 25.2^n - 3n^2 - 10n - 18$.

☆**Thí dụ 2:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} - x_n = 4n + 5 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Ta có : a + b = 1 – 1 = 0 nên nghiệm riêng của pt có dạng $x_n^* = n(an+b) = an^2 + bn$. x_n^* vào pt, ta được : $a(n+1)^2 + b(n+1) - an^2 - bn = 4n+5$.

$\Leftrightarrow 2an + a + b = 4n + 5$.

Đồng nhất hệ số hai vế ta được :

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ a+b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow x_n^* = 2n^2 + 3n.$$

Số hạng tổng quát của dãy có dạng : $x_n = c + 2n^2 + 3n$.

Từ $x_0 = 5 \Rightarrow c = 5.$ *Suy ra* $x_n = 2n^2 + 3n + 5.$

✪Dạng 3: Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 \\ ax_{n+1} + bx_n = d \quad (d = \text{const}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Khi đó số hạng tổng quát của dãy số là : $\begin{cases} x_n = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^n .x_0 + \dfrac{d\left[\left(-\dfrac{b}{a}\right)^n - 1\right]}{a\left[\left(-\dfrac{b}{a}\right) - 1\right]} & neu \ \ a+b \neq 0. \\ x_n = x_0 + nd & neu \ \ a+b = 0. \end{cases}$

☆Thí dụ 1: Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} - x_n = 6, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ Tìm CTTQ của x_n .

Giải: Từ công thức truy hồi ta có :

$x_n = x_{n-1} + 6 = x_{n-2} + 2.6 = x_{n-3} + 3.6 = ... = x_0 + 6n$ *hay* $x_n = 6n + 5$.

☆Thí dụ 2: Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} - 8x_n = 4 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n .

Giải: Từ công thức truy hồi, ta có :

$$x_n = 8x_{n-1} + 4 = 8(8x_{n-2} + 4) + 4 = 8^2.x_{n-2} + 4(8+1) = 8^2.x_{n-2} + 4.\frac{8^2 - 1}{8-1} = ... = 8^n.x_0 + 4.\frac{8^n - 1}{8-1}.$$

Suy ra $x_n = 3.8^n + \dfrac{4}{7}.(8^n - 1) = \dfrac{25}{7}.8^n - \dfrac{4}{7}.$

✪Dạng 4: Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 \\ ax_{n+1} + bx_n = d.\alpha^n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng : $a\lambda + b = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{b}{a} = q.$

- Nếu $\lambda \neq \alpha$ thì nghiệm riêng của phương trình $x_n^* = c.\alpha^n$ thay vào pt, ta được :

  $$a.c.\alpha^{n+1} + b.c.\alpha^n = d.\alpha^n \Leftrightarrow c = \frac{d}{a\alpha + b} \Rightarrow x_n^* = \frac{d\alpha^n}{a\alpha + b} = \frac{d\alpha^n}{a(\alpha - q)} \quad (do \ \ b = -qa).$$

  Số hạng tổng quát của dãy : $x_n = c_1.q^n + x_n^* = c_1.q^n + \dfrac{d\alpha^n}{a(\alpha - q)}.$

Từ $x_0 = c_1 + \dfrac{d}{a(\alpha - q)} \Rightarrow c_1 = x_0 - \dfrac{d}{a(\alpha - q)} \Rightarrow x_n = \left(x_0 - \dfrac{d}{a(\alpha - q)}\right).q^n + \dfrac{d\alpha^n}{a(\alpha - q)} = x_0.q^n + \dfrac{d}{a}.\dfrac{\alpha^n - q^n}{\alpha - q}$

- Nếu $\lambda = \alpha$ thì nghiệm riêng của phương trình $x_n^* = cn\alpha^n$ thay vào pt, ta được :

  $$ac(n+1)\alpha^{n+1} + bcn\alpha^n = d\alpha^n \Leftrightarrow c = \frac{d}{a(n+1)\alpha + bn} = \frac{d}{a(n+1)\alpha - aqn} = \frac{d}{aq} \ (do \ q = \alpha).$$

Suy ra $x_n^* = \frac{dnq^n}{aq} = \frac{dnq^{n-1}}{a}$.

Số hạng tổng quát của dãy : $x_n = c_1.q^n + x_n^* = c_1.q^n + \frac{dnq^{n-1}}{a}$.

Từ $x_0 = c_1 \Rightarrow x_n = x_0.q^n + \frac{dnq^{n-1}}{a}$.

Vậy từ trên ta có : $x_n = x_0.q^n + \begin{cases} \frac{d}{a}.\frac{q^n - \alpha^n}{q - \alpha} & neu \;\; q \neq \alpha \\ \frac{d}{a}.nq^{n-1} & neu \;\; q = \alpha \end{cases}$.

☆**Thí dụ 1:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_{n+1} - 3x_n = 2.5^n \;,\;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n .

Ta có : $\lambda = q = -\frac{b}{a} = 3$; $d = 2$; $\alpha = 5$. Vì $q \neq \alpha$ nên ta có số hạng tổng quát của dãy sẽ là :

$$x_n = x_0.q^n + \frac{d}{a}.\frac{q^n - \alpha^n}{q - \alpha} = 5.3^n + 2.\frac{3^n - 5^n}{3 - 5} = 4.3^n + 5^n.$$

☆**Thí dụ 2:** Cho dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} - 3x_n = 5.3^n \;,\;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Ta có: $\lambda = q = -\frac{b}{a} = 3$; $\alpha = 3$; $d = 5$. Vì $q = \alpha$ nên ta có số hạng tổng quát của dãy sẽ là :

$$x_n = x_0.q^n + \frac{d}{a}.nq^{n-1} = 2.3^n + 5n.3^{n-1} = (5n + 6).3^{n-1}.$$

✪**Dạng 5:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 \\ ax_{n+1} + bx_n = d_1\alpha_1^n + d_2\alpha_2^n + ... + d_k\alpha_k^n \quad (1) \;,\;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Xác định sô hạng tổng quát của dãy trên.

Gọi x_n^{*1} là nghiệm riêng của phương trình $ax_{n+1} + bx_n = d_1\alpha_1^n$

x_n^{*2} là nghiệm riêng của phương trình $ax_{n+1} + bx_n = d_2\alpha_2^n$

....

x_n^{*k} là nghiệm riêng của phương trình $ax_{n+1} + bx_n = d_k\alpha_k^n$.

Khi đó nghiệm riêng của phương trình (1) sẽ là $x_n^* = x_n^{*1} + x_n^{*2} + ... + x_n^{*k}$.

Khi đó số hạng tổng quát $x_n = c.\lambda^n + x_n^* \;\; \left(\lambda = -\frac{b}{a}\right)$.

☆**Thí dụ:** Cho dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} - 2x_n = 3.2^n + 5.7^n \;\; (*) \;,\;\; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng : $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

❖ Do $\alpha_1 = \lambda$ nên nghiệm riêng $x_n^{*1} = d_1 n.2^n$, thay vào phương trình, ta được :

$d_1(n+1).2^{n+1} - 2d_1 n.2^n = 3.2^n \Rightarrow d_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_n^{*1} = 3n.2^{n-1}$.

❖ Do $\alpha_2 \neq \lambda$ nên nghiệm riêng $x_n^{*2} = d_2.7^n$, thay vào phương trình, ta được :

$d_2.7^{n+1} - 2d_2.7^n = 5.7^n \Rightarrow d_2 = 1 \Rightarrow x_n^{*2} = 7^n$.

Số hạng tổng quát $x_n = c.2^n + x_n^{*1} + x_n^{*2} = c.2^n + 3n.2^{n-1} + 7^n$

Từ $x_0 = 2 \Rightarrow c+1 = 2 \Rightarrow c = 1$. *Suy ra* $x_n = 2^n + 3n.2^{n-1} + 7^n$.

✪**Dạng 6:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 \\ ax_{n+1} + bx_n = P_k(n) + d\alpha^n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Ta gọi x_n^{*1} là nghiệm riêng của $ax_{n+1} + bx_n = P_k(n)$

x_n^{*2} là nghiệm riêng của $ax_{n+1} + bx_n = d\alpha^n$.

Công thức tổng quát của dãy số được xác định là $x_n = c.\lambda^n + x_n^{*1} + x_n^{*2}$.

Từ giá trị của x_0 ta tìm được giá trị c.

☆**Thí dụ:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} - 5x_n = 3n + 2 + 2.3^n \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Giải: Xét Phương trình đặc trưng : $\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$.

Gọi x_n^{*1} là nghiệm riêng của phương trình $x_{n+1} - 5x_n = 3n + 2 \Rightarrow x_n^{*1} = -\frac{3}{4}n - \frac{11}{16}$.

x_n^{*2} là nghiệm riêng của phương trình $x_{n+1} - 5x_n = 2.3^n \Rightarrow x_n^{*2} = -3^n$.

Số hạng tổng quát của dãy cho bởi: $x_n = c.\lambda^n + x_n^* = c.5^n - \frac{3}{4}n - \frac{11}{16} - 3^n$.

Từ $x_0 = 3 \Rightarrow c - \frac{11}{16} - 1 = 3 \Rightarrow c = \frac{75}{16}$. *Suy ra* $x_n = \frac{75}{16}.5^n - \frac{3}{4}n - \frac{11}{16} - 3^n$.

II-Phương trình sai phân bậc hai:

✪**Dạng 1:** Dạng thuần nhất và có phương trình đặc trưng bậc hai tồn tại nghiệm thực.

Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 ; x_1 \\ ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \ , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Xét phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (1).

❖ Phương trình (1) có nghiệm $\lambda_1 ; \lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ thì số hạng tổng quát có dạng :
$x_n = c_1.\lambda_1^n + c_2.\lambda_2^n$. Từ x_0 ; x_1 ta tìm được c_1 và c_2.

❖ Phương trình (1) có nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ thì số hạng tổng quát có dạng :
$x_n = (c_1 + nc_2).\lambda^n$. Từ x_0 ; x_1 ta tìm được c_1 và c_2.

☆**Thí dụ 1:** Cho dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 2; \ x_1 = 5. \\ x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n .

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = 3$.

Số hạng tổng quát của dãy có dạng $x_n = c_1.2^n + c_2.3^n$.

Từ $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = 2^n + 3^n$.

☆**Thí dụ 2:** Cho dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 3; \ x_1 = 10. \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n .

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 2$.

Số hạng tổng quát của dãy có dạng $x_n = (c_1 + nc_2).2^n$.

Từ $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 3 \\ 2(c_1 + c_2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = (2n+3).2^n$.

✪**Dạng 2:** Dạng thuần nhất và phương trình đặc trưng vô nghiệm thực.

Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 \,;\, x_1 \\ ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0 \,,\, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n .

Xét phương trình đặc trưng $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (2). Ta có phương trình (2) không tồn tại nghiệm thực, khi đó số hạng tổng quát của dãy có dạng : $x_n = r^n(c_1\cos n\varphi + c_2 \sin n\varphi)$.

Trong đó $r = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\varphi = \arctan\frac{B}{A}$ với $A = -\frac{b}{2a}$; $B = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Từ hai giá trị x_0 và x_1 ta tìm được c_1 và c_2.

☆**Thí dụ:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 1 \,;\, x_1 = 3\sqrt{3} + 1 \\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - 16x_n \,,\, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n .

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 16 = 0$ co $\Delta = 2^2 - 16 = -12 < 0$.

Suy ra phương trình sai phân không có nghiệm thực.

Đặt $A = -\frac{b}{2a} = 1$; $B = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \sqrt{3}$ và $r = \sqrt{A^2 + B^2} = 2$; $\varphi = \arctan\frac{B}{A} = \frac{\pi}{3}$.

Khi đó số hạng tổng quát của x_n có dạng : $x_n = 2^n\left(c_1\cos\frac{n\pi}{3} + c_2\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

Từ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ 2\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$. $Suy\,ra$ $x_n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + 3\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

✪**Dạng 3**: Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0; \, x_1 \\ ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = d \,,\, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Gọi x_n^* là nghiệm riêng của phương trình. Khi đó nghiệm riêng x_n^* được xác định như sau:

$$\left[\begin{array}{l} x_n^* = \dfrac{d}{a+b+c} \quad khi\ a+b+c \neq 0 \\ x_n^* = \dfrac{dn}{2a+b} \quad khi\ a+b+c = 0 \,;\, 2a+b \neq 0 \\ x_n^* = n(n-1)\dfrac{d}{2a} \quad khi\ a+b+c = 0 \,;\, 2a+b = 0. \end{array}\right.$$

Xét phương trình đặc trưng, xét nghiệm của phương trình đặc trưng như các trường hợp trên. Kết hợp với nghiệm riêng ta có được công thức của x_n.

☆**Thí dụ 1:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = -4 \,;\, x_1 = 1 \\ 2x_{n+2} = 5x_{n+1} - 2x_n + 3 \,,\, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Xét phương trình đặc trưng : $2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Do a+b+c $\neq$ 0 nên nghiệm riêng của phương trình $x_n^* = \frac{d}{a+b+c} = \frac{3}{2-5+2} = -3$.

Số hạng tổng quát của dãy số : $x_n = c_1.2^n + c_2.\frac{1}{2^n} - 3$.

Từ $\begin{cases} x_0 = -4 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 - 3 = -4 \\ 2c_1 + \frac{c_2}{2} - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -4 \end{cases}$. $Suy\,ra$ $x_n = 3.2^n - \frac{1}{2^{n-2}} - 3$.

☆**Thí dụ 2:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 5;\ x_1 = \dfrac{89}{5} \\ x_{n+2} = 7x_{n+1} - 6x_n + 11,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 6$.

Do a+b+c=0 và 2a+b ≠ 0 nên nghiệm riêng $x_n^* = \dfrac{dn}{2a+b} = \dfrac{11n}{2-7} = -\dfrac{11}{5}n$.

Số hạng tổng quát của dãy có dạng $x_n = c_1 + c_2.6^n - \dfrac{11}{5}n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Từ $\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_1 = \dfrac{89}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ c_1 + 6c_2 - \dfrac{11}{5} = \dfrac{89}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = 2 + 3.6^n - \dfrac{11}{5}n$.

☆**Thí dụ 3:** Cho dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 3;\ x_1 = 2 \\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 6,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Xác định công thức tổng quát x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1$.

Có a+b+c=0 và 2a+b=0 nên nghiệm riêng $x_n^* = n(n-1)\dfrac{d}{2a} = 3n(n-1)$.

Số hạng tổng quát của dãy là : $x_n = c_1 + nc_2 + 3n(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Từ $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 3 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = 3n^2 - 4n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

✪**Dạng 4:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 ; x_1 \\ ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = dq^n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Xác định CTTQ của x_n.

Gọi x_n^* là nghiệm riêng của phương trình sai phân trên. Khi đó nghiệm riêng này được xác đinh như sau : $\left[\begin{array}{l} x_n^* = \dfrac{dq^n}{aq^2 + bq + c}\ khi\ q \ne \lambda_1 \wedge q \ne \lambda_2. \\ x_n^* = \dfrac{ndq^{n-1}}{2aq+b}\ khi\ q = \lambda_1 \vee q = \lambda_2. \\ x_n^* = n(n-1)\dfrac{d}{2a}.q^{n-2}\ khi\ q = \lambda_1 = \lambda_2. \end{array} \right.$.

Xét phương trình đặc trưng, lập công thức nghiệm và ta có được công thức x_n.

☆**Thí dụ 1:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 2 ;\ x_1 = 5 \\ x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 3.4^n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Lập công thức tính x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng : $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \vee \lambda_2 = 5$.

Ta có $q \ne \lambda_1 \wedge q \ne \lambda_2$ nên nghiệm riêng của phương trình $x_n^* = \dfrac{dq^n}{aq^2 + bq + c} = \dfrac{3.4^n}{16 - 32 + 15} = -3.4^n$.

Số hạng tổng quát của dãy là : $x_n = c_1.3^n + c_2.5^n - 3.4^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Từ $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 - 3 = 2 \\ 3c_1 + 5c_2 - 12 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 1 \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = 4.3^n + 5^n - 3.4^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

☆**Thí dụ 2:** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 8 ;\ x_1 = 5. \\ x_{n+2} - 11x_{n+1} + 28x_n = 6.7^n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n .

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 11\lambda + 28 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4 \vee \lambda_2 = 7$.

Ta có: $q=\lambda_2$ nên nghiệm riêng của phương trình $x_n^* = \dfrac{ndq^{n-1}}{2aq+b} = \dfrac{6n.7^{n-1}}{2.1.7-11} = 2n.7^{n-1}$.

Số hạng tổng quát của dãy có dạng : $x_n = c_1.4^n + c_2.7^n + 2n.7^{n-1}$.

Từ $\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 = 8 \\ x_1 = 4c_1 + 7c_2 + 2 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 10 \\ c_2 = -2 \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = 10.4^n - 2.7^n + 2n.7^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

☆**Thí dụ 3:** Cho dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 4 \; ; \; x_1 = -5. \\ x_{n+2} + 10x_{n+1} + 25x_n = 2.(-5)^n \; , \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -5$.

Ta có $q = \lambda_1 = \lambda_2$ nên nghiệm riêng của phương trình $x_n^* = n(n-1)\dfrac{d}{2a}.q^{n-2} = n(n-1).(-5)^{n-2}$.

Số hạng tổng quát của dãy : $x_n = (c_1 n + c_2).(-5)^n + n(n-1).(-5)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Từ

$\begin{cases} x_0 = c_2 = 4 \\ x_1 = -5(c_1 + c_2) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -3 \\ c_2 = 4 \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = (-3n+4).(-5)^n + n(n-1).(-5)^n = (n^2 - 76n + 100).(-5)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$.

✪**Dạng 5:** Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi : $\begin{cases} x_0 \; ; \; x_1 \\ ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = P_k(n) \; , \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ với $P_k(n)$ là đa thức bậc k theo n. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

Nghiệm riêng x_n^* cua phương trình đượ xác định như sau:

$$\left[\begin{array}{l} x_n^* = Q_k(n) \;\; khi \;\; a+b+c \neq 0. \\ x_n^* = nQ_k(n) \;\; khi \;\; a+b+c = 0 \wedge 2a+b \neq 0. \\ x_n^* = n^2 Q_k(n) \;\; khi \;\; a+b+c = 0 \wedge 2a+b = 0. \end{array}\right.$$

Xác định công thức tổng quát theo trình tự các bước như đã trình bày ở các ví dụ trên.

☆**Thí dụ :** Cho dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 31 \; ; \; x_1 = 60. \\ x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 8n^n + 12n + 14, \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng của dãy : $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = 5$.

Ta có : a+b+c ≠ 0 nên nghiệm riêng của phương trình $x_n^* = an^2 + bn + c$. Thay vào công thức truy hồi, tiến hành đồng nhất hệ số ta được : $x_n^* = 2n^2 + 8n + 15$.

Số hạng tổng quát của dãy : $x_n = c_1.2^n + c_2.5^n + 2n^2 + 8n + 15$.

Từ $\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 + 15 = 31 \\ x_1 = 2c_1 + 5c_2 + 25 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 15 \\ c_2 = 1 \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = 15.2^n + 5^n + 2n^2 + 8n + 15, \forall n \in \mathbb{N}$.

✪**Dạng 6:** Cho dãy xác định bởi $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0; \; x_1 \\ ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = P_k(n).\alpha^n \; , \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$ .Tìm CTTQ x_n.

Nghiệm riêng x_n^* của phương trình dạng này được xác định như sau :

$$\left[\begin{array}{l} x_n^* = Q_k(n).\alpha^n \;\; khi \;\; \alpha \neq \lambda_1 \wedge \alpha \neq \lambda_2. \\ x_n^* = n.Q_k(n).\alpha^n \;\; khi \;\; \alpha = \lambda_1 \vee \alpha = \lambda_2. \\ x_n^* = n^2.Q_k(n).\alpha^n \;\; khi \;\; \alpha = \lambda_1 = \lambda_2. \end{array}\right.$$

Từ đây tìm được công thức tổng quát cảu x_n.

☆**Thí dụ**: Cho dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = 5; \; x_1 = 18. \\ x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2(3n+1).3^{n+2} \; , \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. Xác định công thức x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2-6\lambda+9=0 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=3$.

Ta có $\alpha=\lambda_1=\lambda_2$ nên nghiệm riêng của pt $x_n^*=n^2(an+b).3^n$. Thay x_n^* vào công thức truy hồi, rút gọn và đồng nhất hệ số, ta được $x_n^*=(n^3-2n^2).3^n$.

Số hạng tổng quát của dãy là $x_n=(c_1n+c_2).3^n+(n^3-2n^2).3^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Từ $\begin{cases}x_0=c_2=5\\x_1=3(c_1+c_2)-3=18\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_1=2\\c_2=5\end{cases}$. *Suy ra* $x_n=(2n+5).3^n+(n^3-2n^2).3^n=(n^3-2n^2+2n+5).3^n$.

✪Dạng 7: Cho dãy số được xác định bởi $\{x_n\}$:

$\begin{cases}x_0\ ;\ x_1.\\ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=\alpha.\cos n\varphi+\beta\sin n\varphi\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát của dãy trên.

Đối với phương trình dạng này, nghiệm riêng của nó có dạng : $x_n^*=A\cos n\varphi+B\sin n\varphi$.

Thay x_n^* vào công thức truy hồi để xác định được hai hệ số A và B.

☆Thí dụ: Cho dãy $\{x_n\}$: được xác định bởi :

$\begin{cases}x_0=-4\ ;\ x_1=-4+\sqrt{2}\\x_{n+2}-3x_{n+1}+2x_n=\left(3-3\sqrt{2}\right).\cos\dfrac{n\pi}{4}+\sin\dfrac{n\pi}{4},\ \ \forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của dãy.

Giải: Xét phương trình đặc trưng : $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1\vee\lambda_2=2$.

Nghiệm riêng của phương trình có dạng : $x_n^*=A\cos\dfrac{n\pi}{4}+B\sin\dfrac{n\pi}{4}$. Thay vào công thức truy hồi, ta được :

$$\left[A\cos\frac{(n+2)\pi}{4}+B\sin\frac{(n+2)\pi}{4}\right]-3\left[A\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+B\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right]+2\left[A\cos\frac{n\pi}{4}+B\sin\frac{n\pi}{4}\right]=\left(3-3\sqrt{2}\right).\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Phân tích vế trái và rút gọn ta được :

$$\left(B-\frac{3A}{\sqrt{2}}-\frac{3B}{\sqrt{2}}+2A\right).\cos\frac{n\pi}{4}+\left(-A+\frac{3A}{\sqrt{2}}-\frac{3B}{\sqrt{2}}+2B\right).\sin\frac{n\pi}{4}=\left(3-3\sqrt{2}\right)\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Đồng nhất hệ số, ta được : $\begin{cases}B-\dfrac{3A}{\sqrt{2}}-\dfrac{3B}{\sqrt{2}}+2A=3-3\sqrt{2}\\-A+\dfrac{3A}{\sqrt{2}}-\dfrac{3B}{\sqrt{2}}+2A=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=1\\B=1\end{cases} \Rightarrow x_n^*=\cos\dfrac{n\pi}{4}+\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

Số hạng tổng quát của dãy : $x_n=c_1+c_2.2^n+\cos\dfrac{n\pi}{4}+\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

Từ $\begin{cases}x_0=c_1+c_2+1=-4\\x_1=c_1+2c_2+\sqrt{2}=-4+\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c_1=-6\\c_2=1\end{cases}$. *Suy ra* $x_n=2^n-6+\cos\dfrac{n\pi}{4}+\sin\dfrac{n\pi}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

✪Dạng 8: Cho dãy số dạng sau $\{x_n\}$: $\begin{cases}x_0\ ;\ x_1\\ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=d_{n1}+d_{n2}+...+d_{nk}\ \ (1),\ \forall n\in\mathbb{N}.\end{cases}$

Trong đó d_{ni} là một trong các dạng sau : hằng số d, $d.\alpha^n$, $P_k(n)$, $\alpha^n.P_k(n)$, ...

Khi đó ta gọi x_n^{*i} là nghiệm riêng của phương trình $ax_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=d_{ni}$.

Nghiệm riêng của (1) được xác định là $x_n^* = \sum_{i=1}^{k} x_n^{*i}$. Sau đó ta thiết lập được công thức tổng quát như các thí dụ đã cho.

III-Phương trình sai phân bậc ba:

Loại 1: Phương trình thuần nhất :

✪**Dạng 1:** Cho dãy {x_n} : $\begin{cases} x_0 \ ; \ x_1 \ ; \ x_2 \\ ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát x_n của dãy số.

Xét phương trình đặc trưng $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$. Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\lambda_1 ; \lambda_2 \ va \ \lambda_3$. Khi đó số hạng của dãy được xác định là : $x_n = c_1.\lambda_1^n + c_2.\lambda_2^n + c_3.\lambda_3^n$.

Từ các giá trị $x_0 ; x_1 ; x_2$ ta xác định được các giá trị $c_1 ; c_2 \ va \ c_3$.

☆**Thí dụ:** Cho dãy số {x_n} : $\begin{cases} x_0 = 1; \ x_1 = 5 \ ; \ x_2 = 8. \\ x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n .

Giải: Xét phương trình đặc trưng : $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 ; \ \lambda_2 = 2 \ ; \ \lambda_3 = 3.$

Số hạng tổng quát của dãy có dạng : $x_n = c_1 + c_2.2^n + c_3.3^n$.

Từ $\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ x_1 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5 \\ x_2 = c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{11}{2} \\ c_2 = 9 \\ c_3 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = -\dfrac{11}{2} + 9.2^n - \dfrac{5}{2}.3^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

✪**Dạng 2:** : Cho dãy {x_n} : $\begin{cases} x_0 \ ; \ x_1 \ ; \ x_2 \\ ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát x_n của dãy số.

Xét phương trình đặc trưng $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\lambda_1 \ va \ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

Khi đó số hạng tổng quát của dãy số cho bởi : $x_n = c_1.\lambda_1^n + (c_2 n + c_3).\lambda^n$.

Từ các giá trị $x_0 ; x_1 ; x_2$ ta xác định được các giá trị $c_1 ; c_2 \ va \ c_3$.

☆**Thí dụ:** Cho dãy số {x_n} : $\begin{cases} x_0 = 5; \ x_1 = 11 \ ; \ x_2 = 16 \\ x_{n+3} - 11x_{n+2} + 32x_{n+1} - 28x_n = 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm CTTQ của dãy.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 32\lambda - 28 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 7 \vee \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$

Số hạng tổng quát của dãy có dạng : $x_n = c_1.7^n + (c_2 n + c_3).2^n$

Từ $\begin{cases} x_0 = c_1 + c_3 = 5 \\ x_1 = 7c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 11 \\ x_2 = 49c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{6}{35} \\ c_2 = \dfrac{13}{14} \\ c_3 = \dfrac{181}{35} \end{cases}$. *Suy ra* $x_n = -\dfrac{6}{35}.7^n + \left(\dfrac{13}{14}n + \dfrac{181}{35}\right).2^n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$.

✪**Dạng 3:** Cho dãy {x_n} : $\begin{cases} x_0 \ ; \ x_1 \ ; \ x_2 \\ ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát x_n của dãy số.

Xét phương trình đặc trưng $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ có 1 nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Khi đó công thức nghiệm tổng quát có dạng : $x_n = (c_1 n^2 + c_2 n + c_3).\lambda^n$.

Từ các giá trị $x_0 ; x_1 ; x_2$ ta xác định được các giá trị $c_1 ; c_2$ va c_3.

☆**Thí dụ:** Cho dãy số {xn} : $\begin{cases} x_0 = 3 ; x_1 = 2 ; x_2 = 8 \\ x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0 , \quad \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát của dãy.

Giải: Xét phương trình đặc trưng : $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Số hạng tổng quát của dãy có dạng : $x_n = c_1 n^2 + c_2 n + c_3$.

Từ $\begin{cases} x_0 = c_3 = 3 \\ x_1 = c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ x_2 = 4c_1 + 2c_2 + c_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{7}{2} \\ c_2 = -\dfrac{9}{2} \\ c_3 = 3 \end{cases}$. Suy ra $x_n = \dfrac{7}{2}n^2 - \dfrac{9}{2}n + 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

✪**Dạng 4:** Cho dãy {xn} : $\begin{cases} x_0 ; x_1 ; x_2 \\ ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát x_n của dãy số.

Xét phương trình đặc trưng $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ có 1 nghiệm thực λ và hai nghiệm phức.

Khi đó số hạng tổng quát của phương trình có dạng : $x_n = c_1.\lambda^n + c_2.\cos n\varphi + c_3.\sin n\varphi$.

Từ các giá trị $x_0 ; x_1 ; x_2$ ta xác định được các giá trị $c_1 ; c_2$ va c_3.

☆**Thí dụ:** Cho dãy số {xn} : $\begin{cases} x_0 = 3; x_1 = 4 + \sqrt{3} ; \ x_2 = 8 + \sqrt{3}. \\ x_{n+3} - 5x_{n+2} + 22x_{n+1} - 48x_n = 0 , \quad \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$. Tìm CTTQ của x_n.

Giải: Xét phương trình đặc trưng $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 22\lambda - 48 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 16) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 16 = 0 \quad (VN) \end{cases}$. Phương trình sai phân bậc hai $\lambda^2 - 2\lambda + 16 = 0$ không có nghiệm thực nên theo thí dụ trong dạng 2 của phương trình sai phân bậc hai ta có số hạng tổng quát là $x_n^{'} = c_2.\cos\dfrac{n\pi}{3} + c_3 \sin\dfrac{n\pi}{3}$. Vậy số hạng tổng quát $x_n = c_1.3^n + c_2.\cos\dfrac{n\pi}{3} + c_3.\sin\dfrac{n\pi}{3}$.

Từ $\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 = 3 \\ x_1 = 3c_1 + \dfrac{c_2}{2} + \dfrac{c_3\sqrt{3}}{2} = 4 + \sqrt{3} \\ x_2 = 9c_1 - \dfrac{c_2}{2} + \dfrac{c_3\sqrt{3}}{2} = 8 + \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 2 \end{cases}$. Suy ra $x_n = 3^n + 2\left(\cos\dfrac{n\pi}{3} + \sin\dfrac{n\pi}{3}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Loại 2: Phương trình không thuần nhất.

Cho dãy số dạng {xn} : $\begin{cases} x_0 ; x_1 ; x_2 \\ ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = d_n \ , \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$.

Trong đó d_n có thể là hăng số, $m\alpha^n$, đa thức bậc k theo n $P_k(n)$, ...

Ta tiến hành tìm nghiệm riêng như dạng đối với phương trình bậc 2 đã trình bày ở trên.

IV-Phương trình sai phân bậc cao.

✪**Dạng 1:** Phương trình thuần nhất : $a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + ... + a_k x_n = 0$.

Xét phương trình đặc trưng : $a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k = 0$.

TH1: có k nghiệm thực phân biệt, khi đó số hạng tổng quát của dãy sẽ có dạng :

$$x_n = c_1.\lambda_1^n + c_2.\lambda_2^n + c_3.\lambda_3^n + ...+ c_k.\lambda_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i.\lambda_i^n.$$

TH2: Có s nghiệm bằng nhau , (k – s) nghiệm khác nhau và khác với s nghiệm trên. Khi đó số hạng tổng quát của dãy có dạng : $x_n = \left(\sum_{p=0}^{s-1} c_{p+1}.n^p\right).\lambda^n + \sum_{i=s+1}^{k} c_i.\lambda_i^n$.

TH3: Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức : $x_j = A + Bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trong đó $r = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\varphi = \arctan\frac{B}{A}$ và k – 2 nghiệm thực khác nhau thì số hạng tổng quát của dãy số sẽ có dạng : $x_n = \sum_{i=1}^{k-2} c_i.\lambda_i^n + r^n\left(c_1'.\cos n\varphi + c_2'.\sin n\varphi\right)$.

✪**Dạng 2:** Phương trình không thuần nhất: $a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + ...+ a_kx_n = b_n$.

Ta xét thêm nghiệm riêng x_n^* tuỳ theo dạng của b_n và các hệ số a_i . Thiết lập công thức tổng quát của x_n từ các giả thiết của bài.

V-Một số dạng đặc biệt khác thường gặp của dãy số trong các kì thi.

✪**Dạng 1:** Phương trình sai phân dạng " Hệ phương trình sai phân tuyến tính cấp một".

Cho dãy số {x_n} , {y_n} được xác định như sau : $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$.

Tìm số hạng tổng quát x_n và y_n.

Đưa hệ về phương trình sai phân tuyến tính cập 2 của từng dãy {x_n} và {y_n} :

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + by_{n+1} = ax_{n+1} + b(cx_n + dy_n) = ax_{n+1} + bcx_n + d(x_{n+1} - ax_n) = (a+d)x_{n+1} + (bc - ad)x_n$$

$$y_{n+2} = cx_{n+1} + dy_{n+1} = c(ax_n + by_n) + dy_{n+1} = dy_{n+1} + bcy_n + a(y_{n+1} - dy_n) = (a+d)y_{n+1} + (bc - ad)y_n.$$

Đưa được hệ về dạng phương trình cơ bản, từ đây ta dễ dàng tìm được CTTQ của số hạng từng dãy đã cho.

☆**Thí dụ:** Tìm CTTQ của dãy số {x_n} và {y_n} : $\begin{cases} u_0 = 2; & u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_0 = 1; & v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Giải: Ta có : $u_{n+2} = (a+d)u_{n+1} + (bc - ad)u_n = 4u_{n+1} - 3u_n$ và $u_1 = 5$.

Từ đây, ta có : $u_n = \frac{1+3^{n+1}}{2} \Rightarrow v_n = u_{n+1} - 2u_n = \frac{-1+3^{n+1}}{2}$.

✪**Dạng 2:** Phương trình sai phân dạng phân thức tuyến tính:

Tìm CTTQ của dãy số có công thức xác định như sau : $x_0 = \alpha$; $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Cách 1: Đặt $x_k = \frac{y_k}{z_k}$ $(z_k \neq 0)$. Khi đó dãy được biến đổi thành :

$$\frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{a.\frac{y_n}{z_n} + b}{c.\frac{y_n}{z_n} + d} = \frac{ay_n + bz_n}{cy_n + dz_n} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1} = ay_n + bz_n \\ z_{n+1} = cy_n + dz_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} + (bc - ad)y_n \\ z_{n+2} = (a+d)z_{n+1} + (bc - ad)z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ công thức tổng quát của {y_n} và {z_n} ta suy ra CTTQ của {x_n} .

Cách 2: Đặt $x_n = u_n + t$, thay vào công thức truy hồi của dãy ta có :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + at + b}{cu_n + ct + d} - t = \frac{(a - ct)x_n - ct^2 + (a-d)t + b}{cu_n + ct + d} \quad (*).$$

Ta chọn t sao cho $ct^2+(d-a)t-b=0$. Khi đó ta chuyển (*) về dạng : $\frac{1}{u_n}=m\frac{1}{u_{n-1}}+n$.

Từ đây ta tìm được $\frac{1}{u_n}$, suy ra u_n.

☆**Thí dụ:** Tìm CTTQ của dãy số {u$_n$} : $\begin{cases} u_1=2 \\ u_n=\dfrac{-9u_{n-1}-24}{5u_{n-1}+13} & \forall n\ge 2.\end{cases}$.

Cách 1: Đặt $u_n=\frac{x_n}{y_n}$, thay vào công thức truy hồi ta được :

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{-9\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}-24}{5\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}+13}=\frac{-9x_{n-1}-24y_{n-1}}{5x_{n-1}+13y_{n-1}}\Rightarrow\begin{cases}x_{n+1}=-9x_n-24y_n\\ y_{n+1}=5x_n+13y_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{n+2}=4x_{n+1}-3x_n\\ y_{n+2}=4y_{n+1}-3y_n\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Từ $u_1=2\Rightarrow u_2=-\frac{42}{23}$. Ta chọn $\begin{cases}x_1=2\ ;\ x_2=-42\\ y_1=1\ ;\ y_2=23\end{cases}$.

Từ đây ta tìm được : $\begin{cases}x_n=-22.3^{n-1}+24\\ y_n=11.3^{n-1}-10\end{cases}$. *Suy ra* $u_n=\frac{-22.3^{n-1}+24}{11.3^{n-1}-10}\quad\forall n\ge 2.$

Cách 2: Đặt $u_n=x_n+t$, thay vào công thức truy hồi ta được :

$$x_n+t=\frac{-9x_n-9t-24}{5x_n+5t+13}\Rightarrow x_n=\frac{(-9-5t)x_{n-1}-5t^2-22t-24}{5x_{n-1}+5t+13}$$

Ta chọn t : $5t^2+22t+24=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow x_1=4.$

$$\Rightarrow x_n=\frac{x_{n-1}}{5x_{n-1}+3}\Rightarrow\frac{1}{x_n}=\frac{3}{x_{n-1}}+5\Rightarrow\frac{1}{x_n}=\frac{11.3^{n-1}-10}{4}\Rightarrow x_n=\frac{4}{11.3^{n-1}-10}\Rightarrow u_n=x_n-2=\frac{-22.3^{n-1}+24}{11.3^{n-1}-10}.$$

✪**Dạng 3:** Hệ phương trình tuyến tính bậc 2.

Tìm CTTQ của dãy số (u$_n$) và (v$_n$) được xác định bởi : $\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+a.v_{n-1}^2\ ;\ u_1=\alpha\\ v_n=2u_{n-1}.u_{n-1}\ ;\ v_1=\beta\end{cases}\ \left(a\in\mathbb{N}^+\right)$

$$\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+a.v_{n-1}^2\\ \sqrt{a}.v_n=2\sqrt{a}.u_{n-1}.v_{n-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_n+\sqrt{a}.v_n=\left(u_{n-1}+\sqrt{a}.v_{n-1}\right)^2=.......=\left(u_1+\sqrt{a}.v_1\right)^{2^{n-1}}\\ u_n-\sqrt{a}v_n=\left(u_{n-1}-\sqrt{a}.v_{n-1}\right)^2=.......=\left(u_1-\sqrt{a}.v_1\right)^{2^{n-1}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\alpha+\beta\sqrt{a}\right)^{2^{n-1}}+\left(\alpha-\beta\sqrt{a}\right)^{2^{n-1}}\right]\\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\left[\left(\alpha+\beta\sqrt{a}\right)^{2^{n-1}}-\left(\alpha-\beta\sqrt{a}\right)^{2^{n-1}}\right]\end{cases}.$$

☆**Thí dụ:** Xác định CTTQ của hai dãy số {u$_n$} và {v$_n$} thoả :

$$\begin{cases}u_1=2\\ v_1=1\end{cases}\text{ và }\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2\\ v_n=2u_{n-1}.v_{n-1}\end{cases}\quad\forall n\ge 2.$$

Giải:

Ta có: $\begin{cases}u_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2\\ \sqrt{2}v_n=2\sqrt{2}u_{n-1}v_{n-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_n+\sqrt{2}v_n=\left(u_{n-1}+\sqrt{2}v_{n-1}\right)^2\\ u_n-\sqrt{2}v_n=\left(u_{n-1}-\sqrt{2}v_{n-1}\right)^2\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} u_n+\sqrt{2}v_n=\left(u_1+\sqrt{2}v_1\right)^{2^{n-1}}=\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}} \\ u_n-\sqrt{2}v_n=\left(u_1-\sqrt{2}v_1\right)^{2^{n-1}}=\left(2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} u_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}\right] \\ v_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}-\left(2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}\right] \end{cases}.$$

✪**Dạng 4:** Dạng phân thức bậc 2 trên bậc 1:

Tìm CTTQ của dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_1=\alpha \\ x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+a}{2x_{n-1}} \quad (a\in\mathbb{R}^+). \quad \forall n\ge 2. \end{cases}$

Đặt $x_n=\dfrac{u_n}{v_n}$, khi đó dãy trên được chuyển về hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ như sau :

$\begin{cases} u_n=u_{n-1}^2+a.v_{n-1}^2 \ ;\ u_1=\alpha \\ v_n=2u_{n-1}v_{n-1} \ ;\ v_1=1 \end{cases}$ $\forall n\ge 2.$ Khi đó $x_n=\dfrac{u_n}{v_n}=\sqrt{a}\dfrac{\left(\alpha+\sqrt{a}\right)^{2^{n-1}}+\left(\alpha-\sqrt{a}\right)^{2^{n-1}}}{\left(\alpha+\sqrt{a}\right)^{2^{n-1}}-\left(\alpha-\sqrt{a}\right)^{2^{n-1}}}.$

☆**Thí dụ:** Xác định CTTQ của dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_1=2 \\ x_n=\dfrac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}} \quad \forall n\ge 2. \end{cases}$.

Giải: Xét hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$: $\begin{cases} u_1=2 \\ v_1=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u_n=u_{n-1}^2+2v_{n-1}^2 \\ v_n=2u_{n-1}v_{n-1} \end{cases}$ $\forall n\ge 2.$

Ta dễ dàng chứng minh được bằng quy nạp $x_n=\dfrac{u_n}{v_n}$.

Theo kết quả bài toán trên, ta có : $x_n=\sqrt{2}.\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}+\left(2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}}{\left(2+\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}-\left(2-\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}}.$

✪**Dạng 5:** Dạng có căn thức trong công thức truy hồi.

a) Với dãy số $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1=\alpha \\ u_n=au_{n-1}+\sqrt{bu_{n-1}^2+c} \quad \forall n\ge 2. \end{cases}$, với $a^2-b=1$ ta xác định CTTQ như sau:

Từ dãy truy hồi $\Rightarrow$ $\left(u_n-au_{n-1}\right)=bu_{n-1}^2+c \Leftrightarrow u_n^2-2au_nu_{n-1}+u_{n-1}^2-c=0$

Thay n bởi n – 1, ta được $u_{n-2}^2-2au_{n-2}u_{n-1}+u_{n-1}^2-c=0.$

Ta đây ta dễ thấy u_n và u_{n-2} là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2-2au_{n-1}X+u_{n-1}^2-c=0$.

Theo định lý Vi-et, ta có $u_n+u_{n-2}=2au_{n-1}$. Từ đây ta dễ dàng xác định CTTQ của x_n.

b) Một cách biểu diễn khác : Cho dãy số $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1=\alpha \\ u_n=\dfrac{u_{n-1}}{a+\sqrt{cu_{n-1}^2+b}} \quad \forall n\ge 2. \end{cases}$, trong đó

$\alpha>0;\ a>1;\ a^2-b=1$ ta xác định CTTQ như sau :

Ta viết lại công thức tổng quát dưới dạng : $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{a}{u_{n-1}}+\sqrt{c+\dfrac{b}{u_{n-1}^2}}$. Đặt $x_n=\dfrac{1}{u_n}$.

Ta có $x_n=ax_{n-1}+\sqrt{bx_{n-1}^2+c}$ đây là dãy mà ta đã xét ở trên.

☆**Thí dụ:** Cho dãy số $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=5u_{n-1}+\sqrt{24u_{n-1}-8} \quad \forall n\ge 2. \end{cases}$ Tìm u_n ?

Giải: Từ công thức truy hồi của dãy ta có : $(u_n - 5u_{n-1})^2 = 24u_{n-1}^2 - 8$

$\Leftrightarrow u_n^2 - 10u_n u_{n-1} + u_{n-1}^2 + 8 = 0$ (1) . Thay n bởi n – 1 ta được :

$u_{n-2}^2 - 10u_{n-2}u_{n-1} + u_{n-1}^2 + 8 = 0$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow u_{n-2}, u_n$ là hai nghiệm của phương trình : $t^2 - 10u_{n-1}t + u_{n-1}^2 - 8 = 0$

Áp dụng định lý Vi-et, ta có : $u_n + u_{n-2} = 10u_{n-1}$.

Ta dễ dàng tìm được $u_n = \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}\left(5-2\sqrt{6}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{6}+2}{2\sqrt{6}}\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n-1}$.

✪**Dạng 6:** Công thức truy hồi bậc hai dạng phân thức.

Cho dãy số {u$_n$} : $\begin{cases} u_1 = \alpha; u_2 = \beta \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + a}{u_{n-2}} \quad \forall n \ge 2. \end{cases}$. Tìm u_n?

Đối với dạng này thì từ công thức truy hồi u_3, u_4, u_5. Ta giả sử $u_n = xu_{n-1} + yu_{n-2} + z$.

Lập hệ phương trình $\begin{cases} u_3 = xu_2 + yu_1 + z \\ u_4 = xu_3 + yu_2 + z \\ u_5 = xu_4 + yu_3 + z \end{cases} \Rightarrow x, y, z.$

Từ công thức truy hồi ta dễ dàng tìm được công thức tổng quát của u_n.

☆**Thí dụ:** Tìm CTTQ của dãy số {u$_n$} : $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-2}} \quad \forall n \ge 2. \end{cases}$.

Giải: Ta có : $u_3 = 3; u_4 = 11; u_5 = 41$. Ta giả sử $u_n = xu_{n-1} + yu_{n-2} + z$.

Ta có hệ pt : $\begin{cases} u_3 = xu_2 + yu_1 + z \\ u_4 = xu_3 + yu_2 + z \\ u_5 = xu_4 + yu_3 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + y + z = 11 \\ 11x + 3y + z = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$.

Ta dễ dạng tìm được $x_n = \frac{9-5\sqrt{3}}{6}.\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{9+5\sqrt{3}}{6}.\left(2-\sqrt{3}\right)^n \quad \forall n \ge 1.$

VI-Sử dụng lượng giác để tìm công thức tổng quát của dãy số :

✪**Dạng 1:** Xác định công thức dãy số dạng {u$_n$} : $\begin{cases} u_1 \\ u_n = 2u_{n-1}^2 - 1 \quad \forall n \ge 2. \end{cases}$ ta làm như sau :

- Nếu $|u_1| \le 1$: ta đặt $u_1 = \cos\alpha$. Khi đó ta có : $u_n = \cos 2^{n-1}\alpha$.
- Nếu $|u_1| > 1$: ta đặt $u_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ $(a \ne 0 \ va \ au_1 > 0)$. Khi đó

  $u_2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \Rightarrow u_3 = \frac{1}{2}\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) \Rightarrow ....u_n = \frac{1}{2}\left(a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)$.

  Với cách xác định số a, ta có a là nghiệm (cùng dấu với u_1) của phương trình $a^2 - 2u_1 a + 1 = 0$. Do tích hai nghiệm la 1 nên nếu a là 1 nghiệm thì $\frac{1}{a}$ sẽ là nghiệm còn lại của phương trình. Khi đó công thức tổng quát có thể viết như sau : $u_n = \frac{1}{2}\left[\left(u_1 - \sqrt{u_1^2 - 1}\right)^{2^{n-1}} + \left(u_1 + \sqrt{u_1^2 - 1}\right)^{2^{n-1}}\right]$.

☆**Thí dụ 1:** Cho dãy số $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = 2u_{n-1}^2 - 1 \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$. Xác định CTTQ của dãy $\{u_n\}$.

Giải: Ta có $u_1 = \frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow u_2 = 2cos^2\frac{\pi}{3} - 1 = cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow u_3 = 2cos^2\frac{2\pi}{3} - 1 = cos\frac{2^2\pi}{3}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $u_n = cos\frac{2^{n-1}\pi}{3} \quad \forall n \geq 1.$.

☆**Thí dụ 2:** Cho dãy số $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 2u_{n-1}^2 - 1 \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$. Xác định CTTQ của u_n.

Giải: Gọi a là nghiệm lớn của phương trình : $\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) = 3 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Ta có $a^2 - 6a + 1 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) = 3$, khi đó $u_2 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 1 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Giả sử $x_k = a^{2^{k-1}} + \frac{1}{a^{2^{k-1}}}$ thì $x_{k+1} = a^{2^k} + \frac{1}{a^{2^k}}$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta được $x_n = a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}} + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}$.

☆**Thí dụ 3:** Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau : $x_1 = 5, \quad x_{n+1} = x_n^2 - 2 \quad \forall n \geq 1$.

Tìm giá trị của $S = \lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n}$.

Giải: Chọn a là nghiệm lớn của phương trình $x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} > 1$.

Ta có $a^2 - 5a + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = a + \frac{1}{a} = 5$; khi đó $x_2 = x_1^2 - 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n = a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}} \quad \forall n \geq 1$.

Chú ý rằng $\left(a^{2^{k-1}} - \frac{1}{a^{2^{k-1}}}\right)\left(a^{2^{k-1}} + \frac{1}{a^{2^{k-1}}}\right) = \left(a^{2^k} - \frac{1}{a^{2^k}}\right)$,

ta có $\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} = \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)x_{n+1}}{\left(a - \frac{1}{a}\right)x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} = \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}\right)}{a^{2^n} - \frac{1}{a^{2^n}}} = \frac{1 + \frac{1}{a^{2^n}}}{1 - \frac{1}{a^{2^n}}}.\left(a - \frac{1}{a}\right)$.

Do đó $S = \lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{a^{2^n}}}{1 - \frac{1}{a^{2^n}}}.\left(a - \frac{1}{a}\right) = a - \frac{1}{a} = \sqrt{21}$.

✪**Dạng 2:** Tìm CTTQ của dãy số $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = p \\ u_n = 4u_{n-1}^3 - 3u_{n-1} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$, ta làm như sau :

- Nếu $|p| \leq 1$, thì $\exists \alpha \in [0; \pi]$: $cos\alpha = p$. Khi đó bằng quy nạp ta chứng minh được : $u_n = cos3^{n-1}\alpha$.

- Nếu $|p|>1$ thì ta đặt $u_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\quad(au_1>0)$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n=\frac{1}{2}\left(a^{3^{n-1}}+\frac{1}{a^{3^{n-1}}}\right)$. hay $u_n=\frac{1}{2}\left[\left(u_1-\sqrt{u_1^2-1}\right)^{3^{n-1}}+\left(u_1+\sqrt{u_1^2-1}\right)^{3^{n-1}}\right]$.

☆Thí dụ 1: Xác định CTTQ của dãy $\{u_n\}$: $\begin{cases}u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ u_n=4u_{n-1}^3-3u_n\ ,\quad \forall n\ge 2.\end{cases}$.

Giải: Ta có $u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow u_2=4\cos^3\frac{\pi}{4}-3\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{3\pi}{4}\Rightarrow u_3=4\cos^3\frac{3\pi}{4}-3\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\frac{3^2\pi}{4}$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n=\cos\frac{3^{n-1}\pi}{4}\quad\forall n\ge 1$.

☆Thí dụ 2: Tìm CTTQ của dãy $\{x_n\}$: $\begin{cases}x_1=7\\ x_n=4x_{n-1}^3-3x_{n-1}\quad\forall n\ge 1.\end{cases}$.

Giải: Gọi a là nghiệm lớn của phương trình $x^2-14x+1=0\Rightarrow a=7+4\sqrt{3}$.

Ta có $u_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)=7\Rightarrow u_2=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-\frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$.

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $u_n=\frac{1}{2}\left(a^{3^{n-1}}+\frac{1}{a^{3^{n-1}}}\right)\quad\forall n\ge 1$.

Vậy công thức tổng quát của dãy là : $u_n=\frac{1}{2}\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^{3^{n-1}}+\left(7-4\sqrt{3}\right)^{3^{n-1}}\right]\quad\forall n\ge 1$.

✪Dạng 3: Cho dãy $\{u_n\}$: $\begin{cases}u_1=p\\ u_n=4u_{n-1}^3+3u_{n-1}\ ,\quad\forall n\ge 2.\end{cases}$. Để xác định công thức tổng quát của nó ta có thể làm như sau :

Ta đặt $u_1=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$. Khi đó bằng nạp ta chứng minh được :

$$u_n=\frac{1}{2}\left(a^{3^{n-1}}-\frac{1}{a^{3^{n-1}}}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(u_1+\sqrt{u_1^2+1}\right)^{3^{n-1}}+\left(u_1-\sqrt{u_1^2+1}\right)^{3^{n-1}}\right].$$

☆Thí dụ : Xác định CTTQ của dãy $\{u_n\}$: $\begin{cases}u_1=\frac{3}{\sqrt{6}}\\ u_n=24u_{n-1}^3-12\sqrt{6}u_{n-1}^2+15u_{n-1}-\sqrt{6}\quad\forall n\ge 2.\end{cases}$

Đặt $u_n=xv_n+y$. Thay vào công thức truy hồi của dãy, biến đổi và rút gọn ta được :

$$xv_n+y=24x^3v_{n-1}^3+12\left(6x^2y-\sqrt{6}x^2\right)v_{n-1}^2+3\left(24xy^2-8\sqrt{6}xy+5x\right)v_{n-1}$$
$$+24y^3-12\sqrt{6}y^2+15y-\sqrt{6}.$$

Ta chọn y sao cho : $\begin{cases}6x^2y-\sqrt{6}x^2=0\\ 24y^3-12\sqrt{6}y^2+15y-\sqrt{6}=y\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Khi đó : $xv_n=24x^3v_{n-1}^3+3xv_{n-1}\Leftrightarrow v_n=24x^2v_{n-1}^3+3v_{n-1}$. Ta chọn $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow v_n=4v_{n-1}^3+3v_{n-1}\ ;\ v_1=2\ \Rightarrow\ v_n=\frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^{3^{n-1}}+\left(2-\sqrt{5}\right)^{3^{n-1}}\right]$$

Suy ra $u_n = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^{3^{n-1}} + \left(2-\sqrt{5}\right)^{3^{n-1}}\right] + \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \forall n \geq 1.$

✪**Dạng 4:** Xác định CTTQ của dãy $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = a - bu_{n-1}^2 \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$ với $\begin{cases} \left|\frac{\alpha}{a}\right| \leq 1 \\ ab = 2 \end{cases}$.

Khi đó ta đặt $u_1 = \alpha = -a\cos\varphi \Rightarrow u_2 = a - b\left(-a\cos\varphi\right)^2 = a\left(1-2\cos^2\varphi\right) = -a\cos 2\varphi$.

Bằng quy nạp ta ta chứng minh được $u_n = -a\cos\left(2^{n-1}\varphi\right) \quad \forall n \geq 1.$

☆**Thí dụ 1:** Xác định CTTQ của $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_n = 2 - u_{n-1}^2 \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$.

Giải: Đặt $-\frac{3}{4} = \cos\varphi,\ \varphi \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, khi đó : $u_1 = -2\cos\varphi \Rightarrow u_2 = 2(1-2\cos^2\varphi) = -2\cos 2\varphi$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = -2\cos 2^{n-1}\varphi \quad \forall n \geq 1.$

☆**Thí dụ 2:** Tìm CTTQ của dãy số $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_n = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-u_{n-1}^2}}}{2} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$.

Giải: Ta có : $u_1 = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow u_2 = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)}}{2} = \sin\frac{\pi}{2.6}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được là : $u_n = \sin\frac{\pi}{2^{n-1}.6} \quad \forall n \geq 2.$

☆**Thí dụ 3:** Cho a, b là hai số dương không đổi thoả mãn a < b và hai dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$

được xác định như sau : $\begin{cases} a_1 = \frac{a+b}{2}\ ;\ b_1 = \sqrt{ba_1} \\ a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\ ;\ b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$. Tìm CTTQ của a_n và b_n.

Giải: Ta có $0 < \frac{a}{b} < 1$ nên ta đặt $\frac{a}{b} = \cos\alpha$ với $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Khi đó : $a_1 = \frac{b\cos\alpha + b}{2} = \frac{b\left(1+\cos\alpha\right)}{2} = b\cos^2\frac{\alpha}{2}$ và $b_1 = \sqrt{b.b\cos^2\frac{\alpha}{2}} = b\cos\frac{\alpha}{2}$

$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{b\cos^2\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\alpha}{2}}{2} = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2^2}$ và $b_2 = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2^2}$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được :

$a_n = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}.....\cos^2\frac{\alpha}{2^n}$ và $b_n = b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}.....\cos^2\frac{\alpha}{2^n}$.

✪**Dạng 5:** Để tìm CTTQ của dãy $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = \frac{u_{n-1}+b}{1-bu_{n-1}} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$

Ta đặt $a = \tan\alpha$ và $b = \tan\beta$, khi đó ta dễ dàng chứng minh được $u_n = \tan\left[\alpha + (n-1)\beta\right]$.

☆**Thí dụ 1 :** Cho dãy $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + \sqrt{2} - 1}{1 + \left(1 - \sqrt{2}\right)u_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$. Tính giá trị của u_{2011}.

Giải: Ta có $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ và $u_1 = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$.

Khi đó, $u_2 = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{8}} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8}\right)$. Bằng quy nạp ta chứng minh được :

$u_n = \tan\left(\frac{\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{8}\right) \quad \forall n \geq 2$. Suy ra $u_{2011} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + 2010.\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right) = -2 - \sqrt{3}$.

☆**Thí dụ 2:** Tìm CTTQ của dãy số $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1 + \sqrt{1 + u_{n-1}^2}} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$

Giải: Ta có : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + \sqrt{1 + \frac{1}{u_{n-1}^2}}$. Đặt $x_n = \frac{1}{u_n}$, khi đó ta được dãy $\{x_n\}$ dược xác định như sau : $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $x_n = x_{n-1} + \sqrt{1 + x_{n-1}^2}$.

Vì $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\frac{\pi}{3} \Rightarrow x_2 = \cot\frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \cot^2\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1 + \cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \cot\frac{\pi}{2.3}$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được : $x_n = \cot\frac{\pi}{2^{n-1}.3} \Rightarrow u_n = \tan\frac{\pi}{2^{n-1}.3} \quad \forall n = 1, 2, 3..........$ ✍

BÀI TẬP DÀNH CHO ĐỘC GIẢ TỰ LUYỆN

Bài 1: Xác định công thức tổng quát của các dãy số sau đây :

a) Cho $x_0 = 1; \quad 3x_{n+1} - 2x_n = 0 \qquad n \geq 0$
b) Cho $x_0 = 1; \quad 5x_{n+1} + 4x_n = 2^n \qquad n \geq 0.$
c) Cho $x_0 = -2; \quad x_{n+1} - x_n = 2n^2 + n - 4 \qquad n \geq 0.$
d) Cho $x_0 = 5; \quad 4x_{n+1} - 7x_n = 6n - 5 \qquad n \geq 0.$
e) Cho $x_0 = -3; \quad x_{n+1} - x_n = 13 \qquad n \geq 0.$
f) Cho $x_0 = 4; \quad 3x_{n+1} + 2x_n = 23 \qquad n \geq 0.$
g) Cho $x_0 = 7; \quad x_{n+1} - 3x_n = 2.3^n \qquad n \geq 0.$
h) Cho $x_0 = 15; \quad 2x_{n+1} - x_n = 2^{n+2} \qquad n \geq 0.$
i) Cho $x_0 = \frac{7}{5}; \quad 11x_{n+1} - 6x_n = 2.3^n - 4^n \qquad n \geq 0.$
j) Cho $x_0 = 1; \ x_1 = 4; \quad x_{n+1} - 4x_{n+1} + x_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1.$
k) Cho $x_0 = 4; \ x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_{n+1} - x_n + \frac{1}{4}x_{n-1} = 0; \qquad n \geq 1.$
l) Cho $x_0 = 3; \ x_1 = 3 - 4\sqrt{3}; \quad x_{n+1} - 2x_n + 13x_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1.$
m) Cho $x_0 = 5; \ x_1 = 1; \quad x_{n+1} - 6x_n + 3x_{n-1} = 14 \qquad n \geq 1.$

n) Cho $x_0=4;\ x_1=3;\quad x_{n+1}+2x_n-3x_{n-1}=6\quad n\ge 1.$

o) Cho $x_0=2;\ x_1=4;\quad x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=11\quad n\ge 1.$

p) Cho $x_0=1;\ x_1=5;\quad x_{n+1}-8x_n+15_{n-1}=4.2^n\quad n\ge 1.$

q) Cho $x_0=1;\ x_1=4;\quad x_{n+1}+3x_n-4x_{n-1}=3.4^n\quad n\ge 1.$

r) Cho $x_0=4;\ x_1=2;\quad x_{n+1}-6x_n+9x_{n-1}=5.3^n;\quad n\ge 1.$

s) Cho $x_0=1;\ x_1=3;\quad x_{n+1}-7x_n+12x_{n-1}=(2n^2+3n-1).2^n\quad n\ge 1.$

t) Cho $x_0=2;\ x_1=-3;\quad x_{n+1}-7x_n+10x_{n-1}=(3n-1).5^n\quad n\ge 1.$

u) Cho $x_0=1;\ x_1=3;\quad x_{n+1}-8x_n+16x_{n-1}=(2n^2+3).4^n\quad n\ge 1.$

v) Cho $x_0=1;\quad x_1=6;\quad x_{n+1}-3x_n+2x_{n-1}=3\cos\frac{n\pi}{3}+2\sin\frac{n\pi}{3}\quad n\ge 1.$

w) Cho $x_0=1;\ x_2=5;\quad 2x_{n+1}-7x_n+5x_{n-1}=2^n+5^n\quad n\ge 1.$

x) Cho $x_1=3;\ y_1=2;\quad \begin{cases} x_{n+1}=2x_n+5y_n \\ y_{n+1}=5x_n-3y_n \end{cases}\quad n\ge 1.$

y) Cho $x_1=2;\quad x_{n+1}=\dfrac{2x_n-7}{4x_n+3}\quad;\quad n\ge 1.$

Bài 2: Xác định Công thức tổng quát của các dãy số đặc biệt sau :

a) Cho $x_0=1;\quad x_1=\frac{1}{2};\quad x_{n+2}=\dfrac{x_{n+2}.x_n}{2002x_{n+1}+2001x_n+2000x_{n+1}x_n}$ với $n\ge 0.$

b) Cho $x_0=1;\quad x_1=2;\quad x_{n+2}=x_{n+1}^2.x_n^3\quad n\ge 0.$

c) Cho $x_1=1;\quad x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2+\sqrt{3+x_n^2}}\quad n\ge 1$

d) Cho $u_0=2;\quad u_1=6+\sqrt{33};\quad u_{n+1}-3u_n=\sqrt{8u_n^2+1}\quad n\ge 1$

e) Cho $\begin{cases} u_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ u_n=\dfrac{u_{n-1}+2-\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}-2\right)u_{n-1}}\quad \forall n\ge 2. \end{cases}$

Bài 3: Cho dãy số $\{u_n\}$ thoả mãn như sau : $\begin{cases} u_n\in\mathbb{Z}^+,\forall n\in\mathbb{N}. \\ u_0=1,\ u_1=9 \\ u_n=10.u_{n-1}-u_{n-2}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2. \end{cases}$

Chứng minh rằng $\forall k\in\mathbb{N},\ k\ge 1.$

a) $u_k^2+u_{k-1}^2-10u_ku_{k-1}=-8$

b) $5u_k-u_{k-1}\vdots 4$ và $3.u_k^2-1\vdots 2$.

Bài 4: Cho dãy $\{x_n\}$ xác định như sau : $\begin{cases} x_0=1;\ x_1=0 \\ x_n-2x_{n-1}+x_{n-2}=2\quad \forall n\ge 2. \end{cases}$

Xác định số tự nhiên n sao cho : $x_{n+1}+x_n=22685.$

Bài 5: Cho day $\{x_n\}$ được xác định bởi : $\begin{cases} x_0=1;\ x_1=5 \\ x_{n+1}=6x_n-x_{n-1}\quad \forall n\ge 1. \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n\sqrt{2}\right)$ **(TH&TT T7/253)**

Mai Xuân Việt – Email: xuanviet15@gmail.com – Tel : 01678336358 – 0938680277 – 0947572201

Bài 6: Xét dãy $\{a_n\}$: $a_1 = \frac{1}{2}$ và $a_{n+1} = \left(\frac{1-\left(1-a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall n \geq 1.$

Chứng minh rằng : $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2005} < 1,03$ **(TH&TT T10/335)**

Bài 7: Cho dãy số $\{a_n\}$: $a_0 = 2; \ a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60} \quad \forall n \geq 1$. Hãy xác định CTTQ của a_n và chứng minh rằng số $\frac{1}{5}(a_{2n} + 8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp với $\forall n \geq 1$. **(TH&TT T6/262)**

Bài 8: Cho dãy số $\{p(n)\}$ được xác định như sau :

$p(1) = 1; \ p(n) = p(1) + 2p(2) + ... + (n-1)p(n-1) \quad \forall n \geq 2$. Xác định p(n) . **(TH&TT T7/244).**

Bài 9: Xét dãy $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3 \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì $2009\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p **(TH&TT T6/286).**

Bài 10: Dãy số thực $\{x_n\}$: $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$.

Tìm tất cả giá trị của a để $x_n < 0 \ \forall n \geq 0$. **(TH&TT T10/313)**

Bài 11: Dãy số $\{x_n\}$: $x_0 = 1; \ x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}.x_n}{2002x_{n+1} + 2001x_n + 2000x_{n+1}.x_n} \quad \forall n \geq 0.$

Hãy tìm CTTQ của x_n **(TH&TT T8/298).**

Bài 12: Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau $\{a_n\}$: $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1} + 1} \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$

Tính tổng $S = a_1 + a_2 + ... + a_{2010.}$

Bài 13: Cho dãy số được xác định bởi : $a_1 = 1.2.3; \ a_2 = 2.3.4; \ ......; \ a_n = n(n+1)(n+2).$

Đặt $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Chứng minh rằng $4S_n + 1$ là số chính phương .

(HSG Quốc Gia – 1991 Bảng B)

Bài 15: Cho hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \ ; \ b_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \ ; \ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng các dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ có cùng giới hạn chung khi $n \to +\infty$.

Tìm giới hạn chung đó. **(HSG Quốc Gia – 1993 Bảng A ngày thứ 2)**

Bài 16: Cho các số nguyên a, b. Xét dãy số nguyên $\{a_n\}$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} a_0 = a; \ a_1 = b; \ a_2 = 2b - a + 2 \\ a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

a) Tìm CTTQ của a_n
b) Tìm các số nguyen a, b để a_n là số chính phương với $\forall n \geq 1998$.

(HSG Quốc Gia – 1998 Bảng B).

Bài 17: Cho dãy số (a_n) : $\begin{cases} a_0 = 3 \\ (3-a_n)(6+a_{n-1}) = 18 \ \forall n \geq 1. \end{cases}$. Tính $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$. **(Trung Quốc – 2004).**

Bài 18: Cho dãy số (a_n) : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \dfrac{7a_{n-1} + \sqrt{45a_{n-1}^2 - 36}}{2} \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) a_n là số nguyên dương với $\forall n \geq 0$.

b) $a_{n+1}a_n - 1$ là số chính phương với $\forall n \geq 0$. **(Trung Quốc – 2005).**

Bài 19: Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1;\ u_2 = 2 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \quad \forall n \geq 3. \end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{u_n^2 - 1}{3}$ là số chính phương **(Chọn đội tuyển Nghệ An – 2007).**

Bài 20: Cho dãy số (b_n) : $\begin{cases} b_0 = 12;\ b_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b_n + b_{n-1} = b_{n-2}.\sqrt{3} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$. Tính $\sum_{i=0}^{2007} b_i$ **(Moldova 2007).**

Bài 21: Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau : $\begin{cases} u_1 = 1;\ u_n > 0 \ \forall n \geq 1 \\ u_n = \dfrac{\sqrt{1+u_{n-1}^2} - 1}{u_{n-1}} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$.

Chứng minh rằng $S = u_1 + u_2 + ... + u_n \geq 1 + \frac{\pi}{4}\left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$. **(HSG Quảng Bình 2008 – 2009).**

Bài 22: Cho đa thức $P(x) = x^3 - 6x + 9$ và $P_n(x) = P(P(....(P(x)))...)$ (n dấu ngoặc). Tìm số nghiệm của P(x) và $P_n(x)$? (Dự tuyển Olympic).

Bài 23: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 14u_n - u_{n-1} \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$.

Chúng minh rằng với $\forall n \geq 0$ thì $2u_n - 1$ là một số chính phương.

(Chọn đội tuyển Romania 2002)

Trên đây là một phần nhỏ kiến thức về bài toán xác định công thức tổng quát của một dãy số mà tôi đã lĩnh hội được và được xin trình bày cho các bạn tham khảo. Mong nhân được những ý kiến đánh giá chân thật từ mọi người. Xin chân thành cảm ơn!

Name : **Mai Xuân Việt**
Address : **Đội II – thôn Dương Quang – Xã Đức Thắng – Huyện Mộ Đức – Tỉnh Quảng Ngãi .**
Email : xuanviet15@gmail.com
Tel : **01678336358 – 0938680277 – 0947572201**